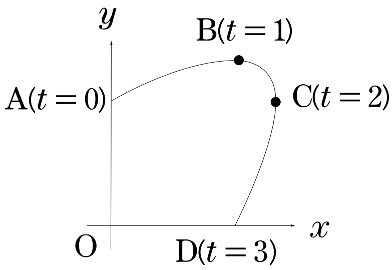
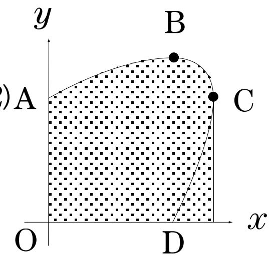
☒**D－3**☒　xyz 空間内に２つの立体 K と L がある．どのような a に対しても，平面 $z=a$ による立体 K の切り口は３点 $(0\,,0\,,a)\,,(1\,,0\,,a)\,,\left(\dfrac{1}{2}\,,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,,a\right)$ を頂点とする正三角形である．また，どのような a に対しても，平面 $y=a$ により立体 L の切り口は３点 $(0\,,a\,,0)\,,$ $\left(0\,,a\,,\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right),\left(1\,,a\,,\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ を頂点とする正三角形である．このとき，立体 K と L の共通部分の体積 V を求めよ．

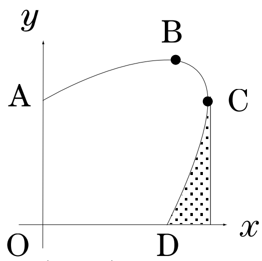
１４０５．線積分



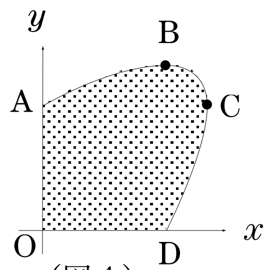
（図１）



（図２）



（図３）



（図４）

☒**A－1**☒　媒介変数 t を用いて

$$x=-t^2+4t\,,\ y=-t^2+2t+3$$

と表される曲線 K は（図１）のようになるが，この曲線上を動く点 $\mathrm{P}(x\,,y)$ に対して，$y\,dx$ つまり $y\dfrac{dx}{dt}dt$ を $\mathrm{A}(t=0)$ から $\mathrm{C}(t=2)$ まで集める（積分する）と，（図２）の打点部の面積 S_1 が得られる．

$$\begin{aligned}S_1&=\int_0^2 y\frac{dx}{dt}dt\\&=\int_0^2(-t^2+2t+3)(-2t+4)\,dt\\&=\int_0^2(2t^3-8t^2+2t+12)\,dt\\&=\left[\frac{1}{2}t^4-\frac{8}{3}t^3+t^2+12t\right]_0^2=\frac{44}{3}\end{aligned}$$

また，$\mathrm{D}(t=3)$ から $\mathrm{C}(t=2)$ まで集めると，（図３）の打点部の面積 S_2 が得られる．

$$S_2=\int_3^2 y\frac{dx}{dt}dt=\left[\frac{1}{2}t^4-\frac{8}{3}t^3+t^2+12t\right]_3^2=\frac{7}{6}$$

よって，（図４）の面積を S とすると，$S=S_1-S_2=\displaystyle\int_0^2 y\frac{dx}{dt}dt-\int_3^2 y\frac{dx}{dt}dt$ となるが，これは $S=\displaystyle\int_0^2 y\frac{dx}{dt}dt+\int_2^3 y\frac{dx}{dt}dt=\int_0^3 y\frac{dx}{dt}dt$ と変形できるから，結局 S は $y\,dx$ を $\mathrm{A}(t=0)$ から $\mathrm{D}(t=3)$ まで集めればよいことになる．これを $y\,dx$ の曲線 K 上での（A から D までの）**線積分**といい，$S=\displaystyle\int_{t=0}^{t=3}y\,dx$ と書く．当然であるが，

$$S=\int_{t=0}^{t=3}y\,dx=\left[\frac{1}{2}t^4-\frac{8}{3}t^3+t^2+12t\right]_0^3=\frac{27}{2}$$

となり，$S_1-S_2=\dfrac{44}{3}-\dfrac{7}{6}=\dfrac{27}{2}$ と一致する．

⑴　上の面積 S を，$x\,dy$ を K 上で線積分することによって求めよ．

⑵　（図４）の打点部を，x 軸のまわりに回転させて得られる立体の体積 V を，$\pi y^2\,dx$ を K 上で線積分することによって求めよ．

⑶　⑵ の体積 V を $2\pi xy\,dy$ を K 上で線積分することによって求めよ．